

Capítol 3

Tipus de Reduccions de Corbes

Xavier Guitart¹

3.1 Introducció

Sigui C/K una corba projectiva llisa definida sobre el cos de fraccions d'un anell de valoració discreta R . Si \mathcal{C}/R és un model enter de la corba sobre R , aleshores té sentit reduir-lo mòdul el primer \mathfrak{p} de l'anell, obtenint així una corba sobre el cos residual. L'objectiu d'aquest capítol és estudiar les possibles corbes que es poden obtenir d'aquesta manera, en funció del gènere de C i en el cas en què el model enter de la corba sigui regular, propi i minimal.

Com que la reducció mòdul \mathfrak{p} de \mathcal{C} és la seva fibra especial (i.e. la seva fibra en \mathfrak{p} , que denotarem $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$), tenim un morfisme d'esquemes $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec}(R)$ tal que la seva fibra

¹Dep. Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya.
E-mail: xevi.guitart@gmail.com

en el punt genèric de $\text{Spec}(R)$ és la corba C i volem determinar les possibilitats per a la fibra en el punt tancat \mathfrak{p} . Això és l'anàleg aritmètic del problema geomètric següent: donat un morfisme $\pi : V \rightarrow F$ on V és una superfície i F una corba tal que la fibra genèrica de π és una corba no singular C (podem pensar per exemple que V és una corba sobre el cos de funcions de F), determinar les possibilitats per a les fibres de π en cada punt de F . Aquest problema geomètric és el que va resoldre Kodaira a [12] en el cas en què C sigui una corba el·líptica; com que el seu argument només utilitzava resultats de teoria de la intersecció que també són vàlids en el context aritmètic, Néron el va adaptar al problema de la reducció de corbes a [23]. Posteriorment Ogg va tractar el problema amb C una corba de gènere 2 a [25], i Artin i Winters ho van fer amb C una corba de gènere g arbitrari [1].

El cas en què la corba sigui una corba el·líptica és el més senzill i serà el que tractarem a la primera secció. El que obtindrem serà una classificació completa de les possibles reduccions (la classificació de Kodaira-Néron), a partir d'un raonament purament combinatori estudiant de manera exhaustiva les interseccions entre les diferents components irreductibles de la reducció mòdul \mathfrak{p} de la corba.

El contingut de la segona secció serà mostrar com aquest mateix raonament es pot traslladar a les corbes de gènere 2 per a obtenir també en aquest cas una llista amb totes les configuracions possibles (classificació d'Ogg). En aquest cas, però, el nombre de configuracions ja és considerablement més gran, la qual cosa fa inviable repetir la mateixa estratègia per a corbes de gènere superior.

A la tercera secció introduïrem una certa estructura combinatòria al problema que servirà alhora per a clarificar una mica els raonaments dels dos primers apartats, i també per a poder dir alguna cosa sobre quina és la situació per a gèneres superiors a 2. En particular, tot i no obtenir una classificació completa sí que veurem que el nombre de configuracions possibles per a cada gènere és, en un cert sentit, finit.

Notacions: En tot el capítol R serà un anell de valoració discreta amb ideal maximal \mathfrak{p} , K el seu cos de fraccions i $k = R/\mathfrak{p}$ el seu cos residual, que suposarem algebraicament tancat.

3.2 Classificació de Kodaira-Néron per a corbes el·líptiques

Si E/K és una corba el·líptica donada per una equació de Weierstrass, un model sobre R de la corba que sempre podem considerar és el model minimal de Weierstrass, que sabem que en reduir-lo mòdul \mathfrak{p} obtindrem una corba sobre k que serà, o bé una corba el·líptica, o bé una corba racional amb un node o una cúspide. En aquesta secció farem la mateixa classificació però no per al model minimal de Weierstrass, sinó per a un model propi regular minimal, de manera que apareixeran altres possibilitats a part de les tres ja esmentades, que consistiran totes elles en unions de corbes racionals amb diverses multiplicitats. Recordem que el fet que el model sobre R sigui minimal vol dir que no té

divisors excepcionals (i.e. isomorfs a \mathbb{P}^1 i amb autointersecció -1), i que sigui propi implica que hi ha una bijecció entre punts K -valuats de E i punts R -valuats de \mathcal{C} .

Sigui doncs E/K una corba el·líptica i sigui \mathcal{C}/R un model propi regular minimal de E/K amb fibra especial

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i$$

on $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ són les seves components irreductibles i n_1, \dots, n_r les multiplicitats amb què apareixen. L'estratègia per a trobar totes les configuracions possibles per a $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ consisteix en utilitzar la teoria de la intersecció per a, en primer lloc, trobar quin tipus de corbes poden ser les Γ_i i, següentment, limitar les configuracions segons les interseccions permeses entre elles. Comencem doncs amb un lema que ens servirà per a fer aquests càlculs:

Lema 3.2.1. *Sigui E/K una corba el·líptica i sigui \mathcal{C}/R un model regular propi minimal amb fibra especial*

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i$$

i denotem per $K_{\mathcal{C}}$ el divisor canònic de \mathcal{C} . Aleshores:

1. *algun dels n_i és 1*
2. $K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 0$
3. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$ *per a tot i .*

Demostració. (1) Si tots els n_i fossin almenys 2, aleshores tots els punts de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ serien singulars, però sabem que la

fibra genèrica de \mathcal{C} és la corba el·líptica E/K , que té un punt racional; com que el model és propi $\mathcal{C}(R) \cong E(K)$ i per tant \mathcal{C} té almenys un punt R -valuat P , per tant $P(\mathfrak{p})$ és un punt no singular de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ ja que \mathcal{C}/R és regular (cf. [34], capítol IV, proposicions 4.3 i 4.4).

(2) Aplicant la fòrmula d'adjunció a $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ tenim:

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) - 2$$

i com que $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 = 0$ i $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = p_a(E) = 1$ per Capítol 1 proposició 4.7, obtenim que $K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 0$.

(3) La fòrmula d'adjunció per a cada Γ_i ens diu que

$$\Gamma_i^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$$

Si per algun i es té que $\Gamma_i^2 = 0$, aleshores per Capítol 1 proposició 4.7 resulta que Γ_i és múltiple racional de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ i aleshores només pot ser $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \Gamma_i$ i per tant $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 0$.

Si per contra $\Gamma_i^2 < 0$ per a tot i , aleshores necessàriament també s'ha de complir que $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$ per a tot i . En efecte, si tinguéssim que $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i < 0$ per algun i , aleshores $2p_a(\Gamma_i) - 2 = \Gamma_i^2 - K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i < 0$ i per tant només pot ser $p_a(\Gamma_i) = 0$ i $\Gamma_i^2 = -1$, cosa que no és possible pel criteri de Castelnuovo ja que estem suposant que \mathcal{C} és un model minimal. Així doncs, el fet que $K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 0$ ens diu que

$$\sum_{i=1}^r n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$$

i com que hem vist que $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$ ha de ser $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$ per a tot i . \square

La següent proposició és la que ens diu quines possibilitats tenim per a les components irreductibles de la fibra especial.

Proposició 3.2.2. *Sigui E/K una corba el·líptica i \mathcal{C}/R un model regular propi minimal de E/K amb fibra especial*

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i$$

1. *Si $r = 1$ aleshores $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \Gamma_1$, $p_a(\Gamma_1) = 1$ i $\Gamma_1^2 = 0$*
2. *Si $r > 1$ aleshores $p_a(\Gamma_i) = 0$ i $\Gamma_i^2 = -2$ per a tot i*

Demostració. (1) És clar que si $r = 1$ aleshores n_1 ha de ser 1 pel primer apartat del lema anterior. A més, ja sabem que el gènere aritmètic de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ ha de ser 1 i que $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 = 1$.

(2) La fórmula d'adjunció aplicada a Γ_i diu que

$$\Gamma_i^2 = 2p_a(\Gamma_i) - 2$$

Però Γ_i^2 no pot ser zero perquè aleshores segons Capítol 1 proposició 4.7, Γ_i seria múltiple de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, que és impossible si $r > 1$. Per tant $\Gamma_i^2 < 0$ i això només pot ser si $p_a(\Gamma_i) = 0$ i per tant $\Gamma_i^2 = -2$. \square

Per tant, la fibra especial és, o bé una corba de gènere aritmètic 1, o bé una unió de corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 que tenen autointersecció -2 . Una vegada sabem com són les possibles components irreductibles de la fibra especial, el que queda fer és veure com són les interseccions entre aquestes fibres; més concretament el que ens fa falta és saber quants cops talla una component Γ_i amb la resta de la fibra. Això

ens ho dóna directament la proposició 4.7 del Capítol 1 que ens diu que $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \cdot \Gamma_i = 0$ i per tant

$$\sum_{j \neq i} n_j \Gamma_j \cdot \Gamma_i = 2n_i \quad (3.2.1)$$

Teorema 3.2.3 (Classificació de Kodaira-Néron). *Si E/K una corba ellíptica. Si \mathcal{C}/R és un model regular propi minimal de E/K aleshores $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ correspon a un dels tipus següents:*

Tipus I_0 *corba no singular de gènere 1.*

Tipus I_1 *corba racional singular amb un node.*

Tipus I_n *n corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 en forma de polígon de n costats.*

Tipus II *corba racional amb una cúspide.*

Tipus III *dues corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 que es tallen en un punt amb multiplicitat 2.*

Tipus IV *tres corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 que es tallen en un punt.*

Tipus I_0^* *cinc corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 disposades tal com s'indica a la figura 3.1.*

Tipus I_n^* *$n + 1$ corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 de multiplicitat 2 que es tallen com indica la figura 3.1, amb dues corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 de multiplicitat 1 que tallen les dels extrems.*

Tipus IV^* *set corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 disposades tal com s'indica a la figura 3.1.*

Tipus III* cinc corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 disposades tal com s'indica a la figura 3.1.

Tipus II* nou corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 disposades tal com s'indica a la figura 3.1.

Remarca 3.2.4. Per tal d'interpretar correctament la figura 3.1 notem que els nombres que apareixen al costat de cada component indiquen la seva multiplicitat i que totes les interseccions entre les components irreductibles de \mathcal{C}_p són simples, llevat de la del tipus III que és doble.

Demostració. No donarem tots els detalls de la prova, que es poden trobar per exemple a [34], secció 8 del capítol IV, però sí que n'indicarem els primers passos per a donar una idea del tipus d'argument combinatori que s'utilitza.

Escrivim com sempre la fibra especial de \mathcal{C} com

$$\mathcal{C}_p = \sum_{i=0}^r n_i \Gamma_i.$$

Ara cal distingir segons si $r = 1$, $r = 2$ o $r \geq 3$.

Si $r = 1$ el lema anterior ens diu que \mathcal{C}_p és una corba de gènere aritmètic 1, i en aquest cas només pot ser una corba no singular de gènere 1, una corba racional singular amb un node o una corba racional singular amb una cúspide. Això ens dóna els tipus I_0 , I_1 i II . A més, aquests seran els únics casos on \mathcal{C}_p té divisors irreductibles de gènere aritmètic 1. Per 3.2.2 si $r > 1$ totes les components irreductibles de \mathcal{C}_p seran de gènere aritmètic 0 (i.e. isomorfes a \mathbb{P}_k^1) i amb autointersecció -2.

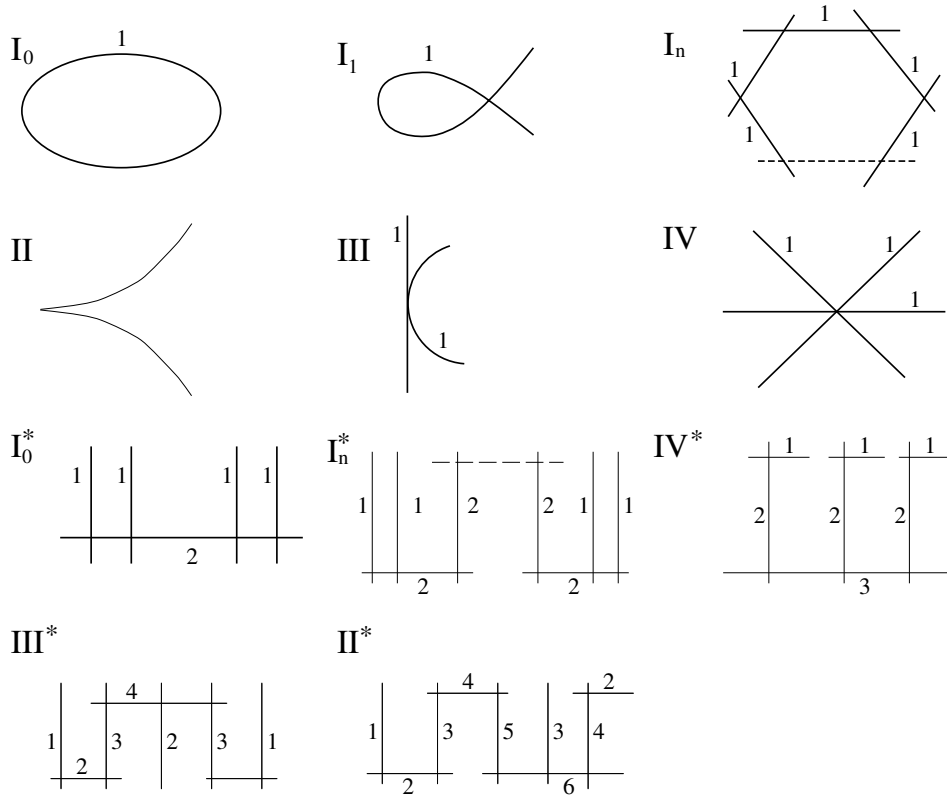


Figura 3.1: Classificació de Kodaira-Néron per a la fibra especial del model regular propi minimal d'una corba el·líptica

Suposem doncs a partir d'ara que $r > 1$. Sabem que alguna de les components de \mathcal{C}_p apareix amb multiplicitat 1, i el que cal fer ara és començar per aquesta component, diguem-ne Γ_1 i mirar quina és la seva intersecció amb la resta de la fibra segons la fórmula (3.2.1). Això ens donarà totes les possibilitats per a les components de la fibra que tallin Γ_1 . Aleshores si pot haver-hi alguna component que no talli Γ_1 , a aquesta component cal aplicar-li novament (3.2.1) i tornar a mirar com són les components que tallen

aquesta, i així successivament.

Si $r = 2$ aleshores $\mathcal{C}_p = \Gamma_1 + n_2\Gamma_2$ i aplicant (3.2.1) a Γ_1 tenim que $n_2\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 = 2$. Aquí hi podria haver dues opcions, però aplicant novament (3.2.1) aquest cop a Γ_2 resulta $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 2n_2$ amb la qual cosa ha de ser $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 2$ i $n_2 = 1$. Això dóna els tipus *III* si Γ_1 i Γ_2 es tallen en un punt de multiplicitat 2 i el tipus I_2 si es tallen en 2 punts de multiplicitat 1.

Si $r \geq 3$, aleshores es pot provar que $\Gamma_i \cdot \Gamma_{i'} \leq 1$ per a tot $i \neq i'$. Com que \mathcal{C}_p és connexa algun $\Gamma_i \cdot \Gamma_1$ serà positiu; suposem que és Γ_2 , amb la qual cosa $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 1$. Aleshores convé distingir entre els casos $n_2 = 1$ i $n_2 > 1$.

Si $n_2 = 1$ aplicant (3.2.1) a Γ_2 obtenim que

$$\sum_{j=3}^r n_j \Gamma_j \cdot \Gamma_2 = 1$$

i per tant només hi ha una altra component que talla Γ_2 , posem Γ_3 i a més $n_3 = 1$. Si Γ_3 talla Γ_1 , pot ser que talli en el mateix punt que talla Γ_2 o en un altre de diferent. Si ho fa en el mateix, aleshores la fibra és de tipus *IV*, i si ho fa en un punt diferent aleshores tenim el tipus I_3 . Si Γ_3 no talla Γ_1 apliquem (3.2.1) a Γ_3 i veiem també que Γ_3 talla la resta de la fibra un sol cop. Per tant hi ha una sola fibra amb multiplicitat 1 que talla Γ_3 , diem-ne Γ_4 . Si Γ_4 talla Γ_1 tenim el tipus I_4 i sinó hi ha una única component que talli Γ_4 , i així successivament. Com que no poden haver-hi infinites components en algun moment s'haurà d'arribar a una component que talli Γ_1 i tindrem I_n .

Queda el cas en què $n_2 > 1$, que es fa de manera molt semblant a l'anterior, tot i que s'han d'analitzar més casos,

i que dóna lloc als tipus que falten. □

3.3 Classificació d'Ogg per a corbes de gènere 2

En aquesta secció descriurem la classificació de la fibra especial d'un model propi regular minimal d'una corba de gènere 2 donada per Ogg a [25]. En aquest article Ogg repeteix el mateix tipus d'argument combinatori que hem vist a la secció anterior, però trobant un nombre molt més gran de possibles configuracions (més d'un centenar); de fet, es va oblidar tres casos que van completar Namikawa i Ueno a [24].

Igual que en el cas de corbes el·líptiques, la tasca de trobar totes les possibles configuracions per a la fibra especial la podem dividir en 2 parts: en primer lloc dir com pot ser cada component irreductible de la fibra especial i, en segon lloc, estudiar les interseccions permeses entre aquestes components irreductibles.

La fórmula d'adjunció aplicada a tota la fibra \mathcal{C}_p , juntament amb el fet que $\mathcal{C}_p^2 = 0$ ens proporciona la relació $K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_p = 2g - 2 = 2$, és a dir

$$\sum_{i=1}^r n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2g - 2 = 2 \quad (3.3.2)$$

Aquesta fórmula imposa restriccions (també en el cas $g > 2$ com veurem a la propera secció) sobre la intersecció que pot tenir cada Γ_i amb el divisor canònic, i serà la que utilitzarem a la següent proposició per a trobar totes les possibilitats per a cada Γ_i .

Proposició 3.3.1. *Sigui C/K una corba projectiva no singular de gènere 2, C/R un model regular propi minimal de C/K i sigui*

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i$$

la seva fibra especial. Aleshores

1. *Si $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = n_1 \Gamma_1$ aleshores forçosament $n_1 = 1$ i $p_a(\Gamma_1) = 2$.*

2. *Si $r > 1$ cada Γ_i és d'algun d'aquests tipus*

Tipus A: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1, \quad \Gamma_i^2 = -1, \quad p_a(\Gamma_i) = 1$

Tipus B: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1, \quad \Gamma_i^2 = -3, \quad p_a(\Gamma_i) = 0$

Tipus C: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2, \quad \Gamma_i^2 = -2, \quad p_a(\Gamma_i) = 1$

Tipus D: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2, \quad \Gamma_i^2 = -4, \quad p_a(\Gamma_i) = 0$

Tipus E: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0, \quad \Gamma_i^2 = -2, \quad p_a(\Gamma_i) = 0$

Demostració. (1) Si $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = n_1 \Gamma_1$, com que $K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2$ tenim que $\Gamma_1 \cdot K_{\mathcal{C}} = 2/n_1$; d'altra banda

$$p_a(\Gamma_1) = 1 + \frac{1}{2} \Gamma_1 \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2}{n_1}$$

i com que $p_a(\Gamma)$ és un enter ha de ser $n_1 = 1$. A més $p_a(\Gamma_1) = p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = g(C) = 2$.

(2) Sigui Γ una component irreductible de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, de manera que $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = n\Gamma + D$.

En primer lloc $\Gamma^2 < 0$ ja que Γ no és múltiple racional de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$.

D'altra banda tenim que $\Gamma \cdot K_{\mathcal{C}} \geq 0$: si per contra tinguéssim $\Gamma \cdot K_{\mathcal{C}} < 0$ de la fórmula d'adjunció aplicada a Γ

tindríem que

$$p_a(\Gamma) = 1 + \frac{1}{2}(\Gamma^2 + \Gamma \cdot K_{\mathcal{C}})$$

i donat que $\Gamma^2 < 0$ i $p_a(\Gamma) \geq 0$ només podria ser $\Gamma \cdot K_{\mathcal{C}} = -1$, $\Gamma^2 = -1$ i $p_a(\Gamma) = 0$, la qual cosa voldria dir que Γ és un divisor excepcional i això no pot ser ja que suposem que \mathcal{C} és minimal.

Ara la fórmula d'adjunció aplicada a $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ ens diu que:

$$\sum_{i=1}^r n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2,$$

per tant $\Gamma \cdot K_{\mathcal{C}}$ pot ser només 0, 1 o 2. A més la fórmula

$$1 + \frac{1}{2}(\Gamma_i^2 + \Gamma_i \cdot K_{\mathcal{C}}) = p_a(\Gamma) \geq 0$$

fa que Γ^2 i $\Gamma \cdot K_{\mathcal{C}}$ tinguin la mateixa paritat i que

$$\Gamma^2 \geq -2 - \Gamma \cdot K_{\mathcal{C}}.$$

Per tant, si $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$, Γ_i^2 ha de ser ≥ -2 , negatiu i parell, per tant només pot ser -2 . Si $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$, Γ_i^2 ha de ser senar, ≥ -3 i negatiu, per tant pot ser -3 o -1 . De la mateixa manera si $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$ aleshores Γ_i^2 només pot ser -2 o -4 i per tant obtenim la taula 2. \square

A la secció anterior, hem vist com per al cas de corbes el·líptiques, la fibra especial d'un model minimal podia ser, o bé una corba de gènere aritmètic 1 (tipus I_0 , I_1 i II) o bé una unió de corbes de gènere aritmètic 0 que podien aparèixer amb diverses configuracions (els vuit tipus restants). En el cas de corbes de gènere 2 hi ha bastants més

casos possibles, i per a descriure'ls Ogg en el seu article utilitza la següent notació: si F és una corba, un dibuix com el de la figura 3.2 indica un divisor com qualsevol dels

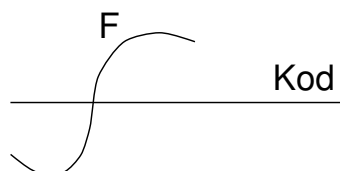


Figura 3.2:

vuit de la classificació de Kodaira-Néron que estan formats per corbes de gènere aritmètic 0, però amb una de les corbes que allà hi apareix amb multiplicitat 1 substituïda per F . És a dir, indica un divisor com per exemple els de la figura 3.3.

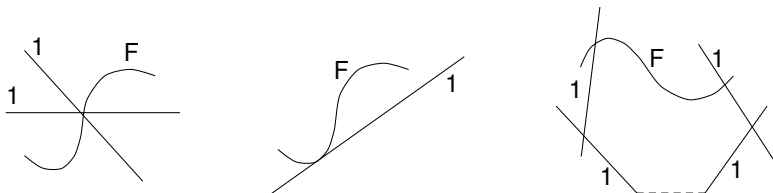


Figura 3.3:

Ogg també utilitza la notació de la figura 3.4 per indicar que la fibra de multiplicitat 3 en qüestió és completada amb alguna de les possibilitats que es veuen a la figura 3.5.

La fibra especial \mathcal{C}_p pot ser, o bé una corba irreductible de gènere aritmètic 2, o bé una de les que apareixen a les figures 3.6 i 3.7. Aquestes figures reproduïxen la taula de

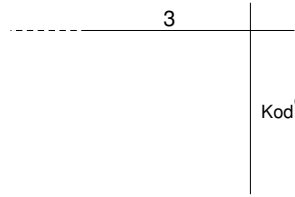


Figura 3.4:

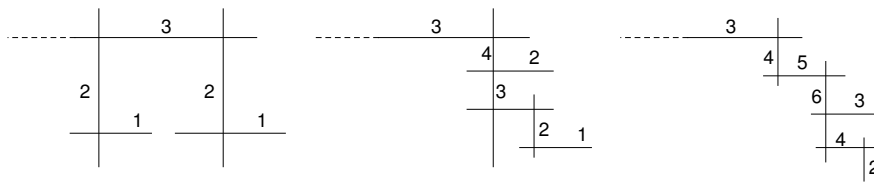


Figura 3.5:

l'article d'Ogg, tot i que els tipus $41a$, $41b$ i $41c$ són els tres casos que Ogg no va tenir en compte i que van completar Namikawa i Ueno a [24].

Per a obtenir aquesta classificació, el primer pas és observar que degut a la fórmula

$$\sum_{i=1}^r n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2,$$

la fibra $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ conté una component de tipus C o D amb multiplicitat 1, o bé una de tipus A i una de tipus B cadascuna amb multiplicitat 1, o bé una de tipus A o B amb multiplicitat 2; la resta de components són de tipus E .

Tot seguit, cal distingir cada un d'aquests casos i aplicar en cada un d'ells raonaments semblants als de la secció anterior, mirant la possible intersecció de la component que

estem considerant amb la resta de la fibra.

Així doncs, si suposem que la fibra conté una component Γ de tipus C amb multiplicitat 1, el fet que $\Gamma^2 = -2$ fa que la intersecció de Γ amb la resta de la fibra sigui 2 i es pugui repetir el mateix argument que en el cas de les corbes el·líptiques. Per tant s'obté la configuració 1 de la figura 3.6, que en realitat agrupa diferents tipus.

Si la fibra conté una component de tipus D amb multiplicitat 1, aleshores s'obtenen fibres de tipus 2 al 11. Si conté una component A de multiplicitat 2, tenim el tipus 12. Si té dues components A cadascuna amb multiplicitat 1 s'obté el tipus 13. Una component A i una B donen lloc al tipus 14. Una component de tipus B amb multiplicitat 2 dóna lloc als tipus 15 a 33. Finalment si la fibra conté dues components de tipus B la configuració obtinguda és de la 34 a la 44.

Remarca 3.3.2. En aquest article hem emprat la notació de [25] per a fer referència als tipus de reducció, que és una notació molt compacta però també molt simplificada i on no s'hi reflecteix tota la informació del tipus de reducció. En canvi Namikawa i Ueno a [24] utilitzen una nomenclatura més precisa; no donarem tota la correspondència entre les dues notacions però sí d'aquells tipus que apareixeran al capítol 5. El tipus I_{e-0-0} és el tipus corresponent a e corbes isomorfes a \mathbb{P}^1 en forma de polígon, però amb un dels \mathbb{P}^1 substituït per una corba de tipus C (cauria dins el tipus 1 amb la notació d'Ogg). El tipus $I_{e_1-e_2-0}$ és el mateix però amb polígons de e_1 i e_2 costats respectivament i amb una corba de tipus D (seria de tipus 2 segons Ogg). $I_{e_1-e_2-e_3}$ correspon al tipus 40, on el nombre de \mathbb{P}^1 indicats pels

punts suspensius és $e_1 - 1$, $e_2 - 1$ i $e_3 - 1$. $I_0 - I_0 - e_0$ correspon al tipus 13 amb $e_0 - 1$ corbes de tipus \mathbb{P}^1 en els punts suspensius. $I_{e_1} - I_0 - e_0$ és de tipus 14 amb $e_0 - 1$ corbes de tipus \mathbb{P}^1 i la part de la fibra que és tipus Kodaira és un polígon de e_1 costats. $I_{e_1} - I_{e_2} - e_0$ és el tipus 39 amb $e_0 - 1$ corbes de tipus \mathbb{P}^1 en els punts suspensius i polígons de e_1 i e_2 costats en les terminacions tipus Kodaira.

1		2		3	
4		5		6	
7		8		9	
10		11		12	
13		14		15	
16		17		18	
19		20		21	
22		23		24a	

Figura 3.6: Classificació d'Ogg per a la fibra especial del model regular propi minimal d'una corba de gènere 2

24		25		26	
27		28		29	
29a		30		31	
32		33		34	
35		36		37	
38		39		40	
41		41a		41b	
41c		42		43	
44					

Figura 3.7: Classificació d'Ogg per a la fibra especial del model regular propi minimal d'una corba de gènere 2

3.4 Cas general: corbes de gènere arbitrari

En les dues seccions anteriors hem vist com, en el cas que la corba sigui de gènere 1 o 2, hi ha una classificació completa de la fibra especial d'un model minimal de la corba. En el cas general no podem donar una llista exhaustiva dels tipus de reducció, però sí que podem assegurar que hi ha un nombre finit de configuracions possibles (entenent que hi ha configuracions que agrupen un nombre infinit de casos, tal com passava per exemple amb la configuració I_n en la classificació de Kodaira- Néron) i podem dir com serà aquesta configuració per a una part de la fibra. Més concretament, tal com suggeria la fórmula (3.3.2), convé distingir entre aquelles components de la fibra que tenen intersecció 0 amb el divisor canònic i aquelles que tenen intersecció diferent de 0; per a aquelles components amb intersecció 0 en sabrem donar totes les possibles configuracions.

Sigui doncs C/K una corba projectiva llisa de gènere $g > 1$ i C/R un model propi regular minimal de C . Com és habitual notem per

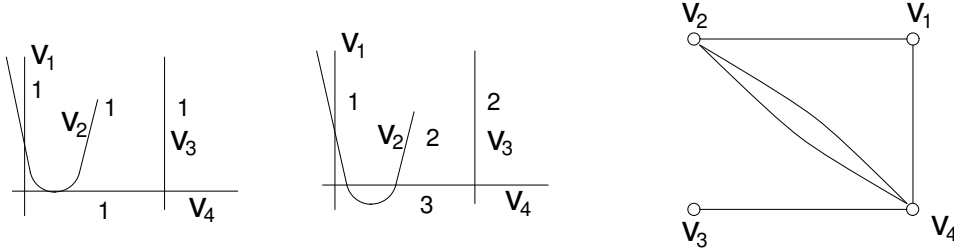
$$\mathcal{C}_p = \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i$$

la seva fibra especial. Un objecte que és convenient introduir per a descriure \mathcal{C}_p (o un divisor fibral qualsevol) és el seu graf dual.

Definició 3.4.1. El graf dual de \mathcal{C}_p que denotarem per $G(\mathcal{C}_p)$ és el graf que té un vèrtex v_i per a cada component irreductible Γ_i i el nombre d'arestes entre v_i i v_j per a $i \neq j$

és $\Gamma_i \cdot \Gamma_j$. La definició s'extén de manera òbvia al graf dual de qualsevol divisor fibrat.

Com que els vèrtexs entre arestes corresponen a les interseccions entre fibres, el graf dual d'un divisor és connex si i només si el divisor és connex. Observem també que el graf associat al divisor conté informació sobre el nombre de components i el nombre d'interseccions entre elles, però es perd la informació sobre la multiplicitat de les components i el tipus d'interseccions. Per exemple els dos divisors següents tenen com a graf dual el graf de la dreta:



Com que el model \mathcal{C} és minimal, per a tota component irreductible Γ_i es compleix que $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$ (pel mateix raonament que a la demostració de la proposició 3.3.1). Aleshores de la fórmula d'adjunció i del fet que $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 = 0$ en resulta que

$$\sum_{i=1}^r n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2g - 2 \quad (3.4.3)$$

amb la qual cosa el nombre de components Γ_i amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \neq 0$ està fitat per $2g - 2$.

La següent proposició ens diu com són les components Γ_i amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$ i les interseccions entre elles. En particular

tota la informació sobre les interseccions entre components d'aquesta mena sí que queda reflectida en el graf dual ja que totes elles són transverses.

Proposició 3.4.2. *Si Γ_i és una component irreductible de \mathcal{C}_p tal que $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$, aleshores $p_a(\Gamma_i) = 0$ i $\Gamma_i^2 = -2$. A més, si Γ_j és una altra component satisfent $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_j = 0$ aleshores $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \leq 1$.*

Demostració. Com que $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$ la fórmula d'adjunció és

$$0 > \Gamma_i^2 = 2p_a(\Gamma_i) - 2 \geq -2$$

i per tant només pot ser $p_a(\Gamma_i) = 0$ i $\Gamma_i^2 = -2$.

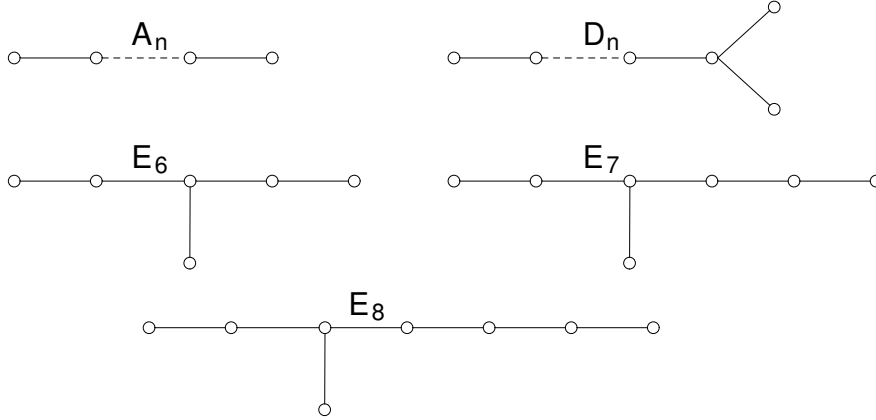
Si p i q són enters aleshores $(p\Gamma_i + q\Gamma_j)^2 < 0$. Si desenvolupem aquesta relació, fem servir que $\Gamma_i^2 = \Gamma_j^2 = -2$ i posem $t = p/q$ aleshores

$$t^2 - t(\Gamma_i \cdot \Gamma_j) + 1 < 0$$

i com que això és vàlid per a tot t , ha de ser $(\Gamma_i \cdot \Gamma_j)^2 < 4$, és a dir, $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \leq 1$. \square

Per tant si a \mathcal{C}_p ens oblidem de les components que tenen intersecció no nul·la amb el divisor canònic i ens quedem només amb aquelles que hi tenen intersecció nul·la, el que ens queda és un divisor on totes les components irreductibles són corbes isomorfes a \mathbb{P}_k^1 , amb autointersecció -2 i que quan es tallen entre elles ho fan transversalment. En el graf dual aquest divisor correspon a eliminar de $G(\mathcal{C}_p)$ tots els vèrtexs associats a les components amb intersecció no nul·la amb el divisor canònic i totes les arestes que surten d'ells. El que queda llavors és un graf possiblement no connex on l'estructura de cada component connexa ve donada per la següent proposició.

Proposició 3.4.3. *Sigui $G(\mathcal{C}_p)$ el graf dual de \mathcal{C}_p i sigui $G_1(\mathcal{C}_p)$ el graf obtingut a partir de $G(\mathcal{C}_p)$ suprimint tots els vèrtexs associats a components Γ_i amb $K_C \cdot \Gamma_i \neq 0$ i totes les arestes que surten d'aquests vèrtexs. Aleshores tota component connexa de $G_1(\mathcal{C}_p)$ és d'algun dels tipus següents, on la n indica el nombre de vèrtexs i $n \geq 4$ per a D_n .*



Demostració. Sigui A una component connexa qualsevol de $G_1(\mathcal{C}_p)$ i suposem que hem etiquetat les components irreductibles de \mathcal{C}_p de manera que $D = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_s$ és el divisor reduït format pels cicles associats a vèrtexs de A . Com que estem suposant $g > 1$ per (3.4.3) no pot ser que D contingui tots els divisors irreductibles de \mathcal{C}_p i per tant la \mathbb{Q} -forma quadràtica associada a la matriu $(\Gamma_i \cdot \Gamma_j)_{i,j}$ és definida negativa en la base $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$.

Per la proposició 3.4.2 sabem que les interseccions en D són transversals, per tant en $G(D)$ entre dos vèrtexs hi ha com a molt una aresta. En primer lloc, observem que $G(D)$ és un arbre, ja que si tingués un camí tancat contindria un

subgraf del tipus \tilde{A}_n amb $n \geq 3$ (figura 3.8), però aleshores el divisor N amb multiplicitats en cada Γ_i les indicades en els vèrtexs de la figura compliria que $N^2 = 0$.

Ara, si $G(D)$ no té cap node, aleshores és del tipus A_n . Veiem que com a molt té un node: si en tingués més d'un, contindria un subgraf del tipus \tilde{D}_n , i amb el mateix raonament que abans aplicat al divisor associat a \tilde{D}_n amb les multiplicitats que indica la figura veiem que això no és possible. Amb el divisor associat a \tilde{D}_5 veiem que de cada node com a molt hi surten 3 vèrtexs.

Amb el divisor associat a \tilde{E}_6 veiem que dels camins que surten del node, almenys un té longitud 1. Si hi ha dos camins que surten del node de longitud 1 aleshores $G(D)$ és de tipus D_n . Si hi ha dos camins de longitud ≥ 2 , el divisor associat a \tilde{E}_7 prova que almenys un dels camins té longitud exactament 2; si l'altre és de longitud 2 tenim E_6 , si és de longitud 3 tenim E_7 i si és de longitud 4 tenim E_8 . Amb \tilde{E}_8 veiem que el tercer camí no pot ser de longitud ≥ 5 . \square

Aquest darrer resultat es pot il·lustrar a partir de la classificació d'Ogg per a corbes de gènere 2: si prenem qualsevol dels tipus que allà hi apareixen, n'eliminem les corbes de tipus A , B , C o D i fem el graf dual, aleshores obtenim per a cada component connexa un dels grafs de la figura 3.4.3. Per exemple, si al tipus 32 de la figura 3.7 li treiem la component $2B$, el divisor que queda té graf dual la unió disjunta d'un A_n i un D_m . Ja hem vist que el nombre de components irreductibles Γ_i amb $K_C \cdot \Gamma_i \neq 0$ és fitat per $2g - 2$ i que les seves multiplicitats n_i també. Per finalitzar enunciem la següent proposició que ens diu que

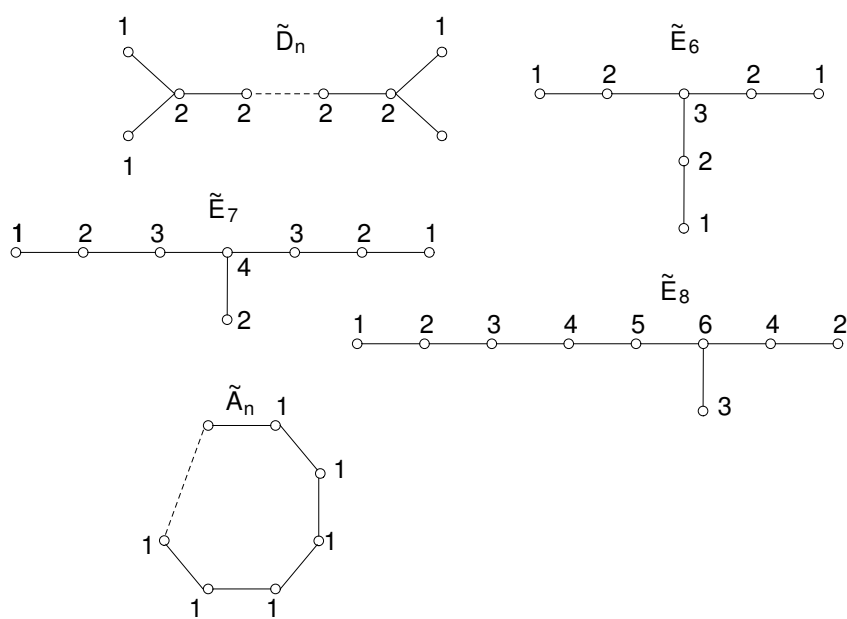


Figura 3.8:

per al graf $G_1(\mathcal{C}_p)$ el nombre de components connexes i la multiplicitat dels vèrtexs també està fitada; la demostració es pot trobar a [17], proposició 1.57 del capítol 10.

Proposició 3.4.4. *Sigui $G(\mathcal{C}_p)$ el graf dual de \mathcal{C}_p i sigui $G_1(\mathcal{C}_p)$ com en la proposició 3.4.3. Existeix una constant c que només depèn de g tal que*

1. $n_i \leq c$ per a tot i .
2. El nombre de components connexes de $G_1(\mathcal{C}_p)$ és menor que c .